Multikolorowanie grafów i ich zastosowanie

Renata Eltman

Graf
graf prosty

- Grafem nazywamy parę G = (V,E), gdzie:
  1) V (zapisywany też V(G)) jest zbiorem wierzchołków
  2) E (zapisywany też E(G)) jest rodziną krawędzi, czyli jedno- dwu-elementowych podzbiorów V.
- Graf prosty: taki, w którym nie ma pętli i krawędzi wielokrotnych.

Kolorowanie grafu

- Kolorowaniem grafu G nazywamy funkcję Ψ, która dla zbioru kolorów C, każdemu wierzchołkowi przypisuje pewien kolor z tego zbioru ($\Psi : V(G) \rightarrow C$) w taki sposób, aby żadne dwa różne i przyległe wierzchołki nie otrzymały tego samego koloru

Liczba chromatyczna

- Najmniejszą liczbę kolorów (najmniejszą moc zbioru C) potrzebną do właściwego pokolorowania grafu G nazywamy liczbą chromatyczną i oznaczamy $\chi(G)$
- Graf, dla którego $\chi(G) \leq k$ nazywamy k-kolorowalnym lub k-dzielnym

Graf z ważeniem

- Grafem z ważeniem nazywamy graf G_d := (V,E,d), w którym $d : V \to N$ jest funkcją przypisującą każdemu wierzchołkowi pewną liczbę naturalną nazywaną wagą wierzchołka
- Graf z ważeniem oznaczamy G_d (lub G, a to, że jest ważony wynika z kontekstu), natomiast wagę wierzchołka v oznaczamy przez d(v)

Multikolorowanie grafu z ważeniem

- Multikolorowaniem grafu ważonego $G = (V,E,d)$ nazywamy funkcję Ψ, która dla pewnego zbioru kolorów C, każdemu wierzchołkowi przypisuje pewien podzbiór tego zbioru ($\Psi : V(G) \to 2^C$) w taki sposób, aby zachowane były następujące warunki:

  1) każdemu wierzchołkowi przypisanych jest d kolorów

  2) dwóm sąsiednim wierzchołkom przypisane są rozłączne zbiory kolorów

Liczba multichromatyczna

- Najmniejszą liczbę kolorów (czyli najmniejszą moc zbioru C) potrzebną do właściwego multipokolorowania grafu z ważeniem nazywamy liczbą multichromatyczną i oznaczamy $\chi_m(G)$

Waga kliki,
ważona liczba klikowa

- Przez wagę kliki rozumieć będziemy sumę wag wszystkich wierzchołków należących do danej kliki w grafie G
- Ważoną liczbą klikową grafu G nazywamy największą wagę kliki spośród wszystkich klik w grafie G. Oznaczamy ją przez W(G)

2 problemy

- Znalezienie dla dowolnego grafu liczby multichromatycznej – niewiele można powiedzieć
- Znalezienie odpowiadającej tej liczbie funkcji Ψ, która określi przypisanie kolorów do wierzchołków – problem NP-trudny

Szacowanie dolne liczby multichromatycznej

- Oczywista obserwacja:
  W każdej klice do multikolorowania trzeba użyć co najmniej tylu kolorów, ile wynosi suma wag w tej klice, zatem dla każdego grafu G zachodzi

$$\chi_m(G) \geq W(G)$$

Szacowanie górne - nie ma tak łatwo

- Niech G będzie ważonym grafem k-kolorowalnym w zwykłym sensie. Wówczas

$$\chi_m(G) \leq k \cdot \max \{ d(v) : v \in V(G) \}$$

Szczególne oszacowania

- Dla ważonych grafów dwudzielnych: $\chi_m(G) = W(G)$
- Powyższe jest prawdą także dla grafów doskonałych
- Dla ważonych cykli C_k, $k \geq 3$ z funkcją wagi d:

$$\chi_m(C_k) = \begin{cases} W(C_k) & dla\ k = 2m \\ \max\left\{W(C_k), \left\lceil \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{k} d(u_i) \right\rceil \right\} & dla\ k = 2m + i \end{cases}$$

Szczególne oszacowania – c.d.

- Dla ważonych grafów planarnych:

$$\chi_m(G) \leqslant \left\lceil \frac{11}{6} \mathsf{W}(G) \right\rceil$$

- Dla ważonych grafów, które są k-kolorowalne i nie posiadają izolowanych wierzchołków:

$$\chi_m(G) \leqslant \frac{k}{2} \mathsf{W}_e(G),$$

gdzie

$$\mathsf{W}_e(G) = \max\{d(u) + d(v) : \{u, v\} \in E(G)\}$$

Grafy heksagonalne + problem otwarty

- Najlepsze znane oszacowanie górne na liczbę multichromatyczną grafów heksagonalnych:

$$\chi_m(G) \le 4/3\ W(G)$$

- Czy prawdą jest, że dla grafu o własnościach jw. zachodzi:

$$\chi_m(G) \le 9/8\ W(G) \qquad ?$$

Grafy heksagonalne bez trójkątów + problem otwarty

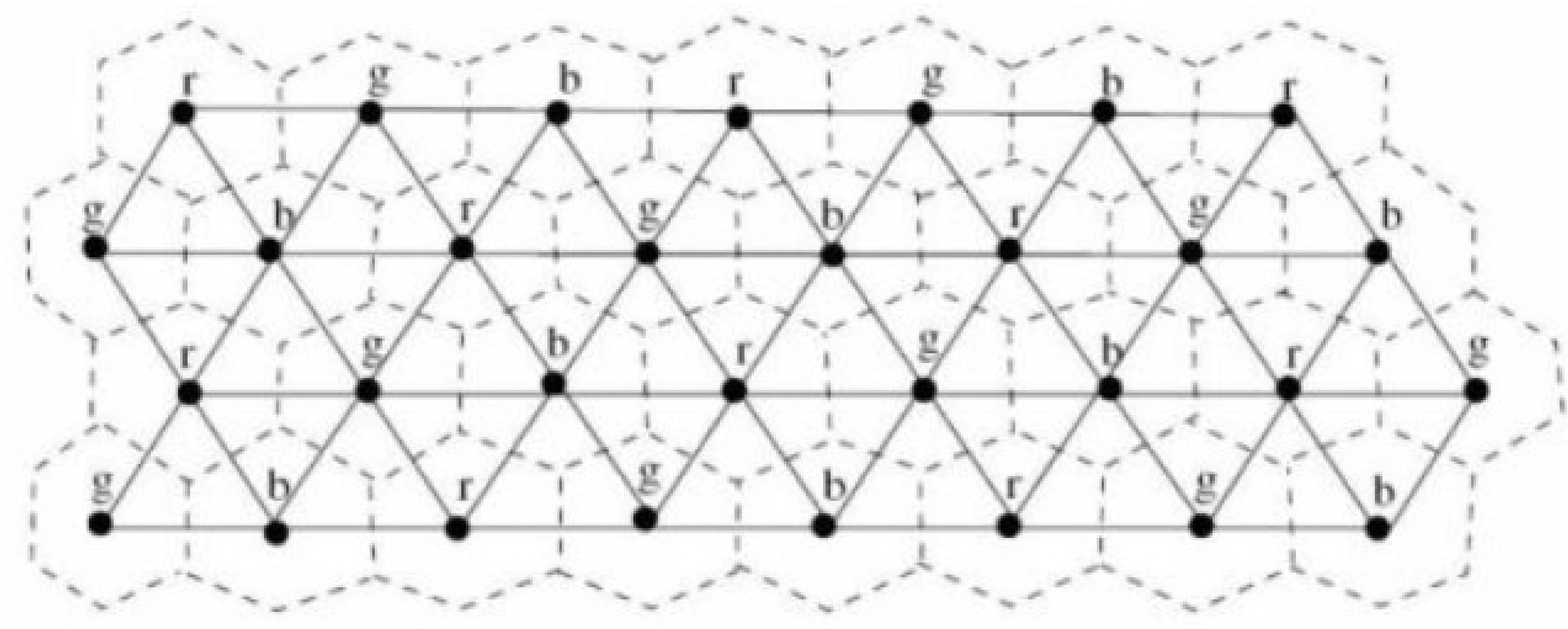
- Najlepsze oszacowanie liczby multichromatycznej dla grafu heksagonalnego bez trójkątów:

$$\chi_m(G) \leq 7/6\ W(G) + O(1)$$

- Czy prawdą jest, że dla grafów o własnościach jw. Zachodzi:

$$\chi_m(G) \leq 9/8\ W(G) \qquad ?$$

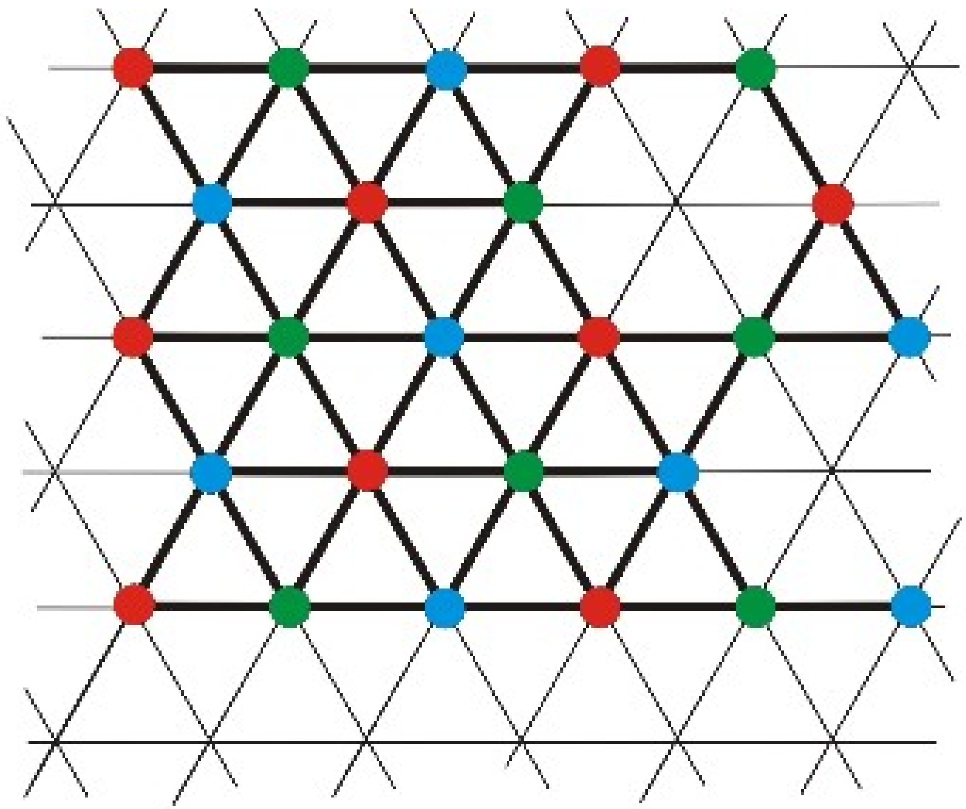
Przydział częstotliwości – graf heksagonalny



Optymalne, prawidłowe rozmieszczenie nadajników w sieci komórkowej

c.d. - przydział częstotliwości – graf heksagonalny

- Graf heksagonalny – dowolny graf będący indukowanym wierzchołkowo podgrafem pokrycia trójkątnego



Przykład grafu heksagonalnego na siatce pokrycia trójkątnego płaszczyzny z 3-kolorowaniem.

Przydział częstotliwości – problem grafowy

- Ciąg ważonych grafów heksagonalnych – sieć komórkowa
- Wierzchołki – nadajniki
- Wierzchołki są połączone krawędzią, gdy obszar nadawania odpowiadających nadajników pokrywa się
- Waga wierzchołka – liczba rozmów w danym nadajniku
- Szukamy multikolorowania w każdej jednostce czasu

Idealny algorytm

Dla zastosowań najważniejsze jest znalezienie optymalnego multikolorowania

- Szybki – działanie w bardzo dużej sieci

  Działanie w czasie stałym – niezależnie od rozmiaru sieci i liczby połączeń

- Działanie równoległe – każda stacja wykonuje swoją część algorytmu niezależnie
- Minimalizacja komunikacji między stacjami bazowymi

Bibliografia

- Rafał Witkowski, "Multikolorowanie grafów"
- Rafał Witkowski „Algorytmy multikolorowania grafów w modelu rozproszonym”