Obiekty de Bruijna odporne na obracanie

Maciej Biesek

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza

18.04.2016

Agenda

Agenda

Agenda

Agenda

1. Obiekty de Bruijna

2. Obiekty de Bruijna odporne na obracanie
   - Macierz de Bruijna odporna na obracanie
   - Ciąg de Bruijna odporny na obracanie
   - Zastosowania

Agenda

Graf de Bruijna

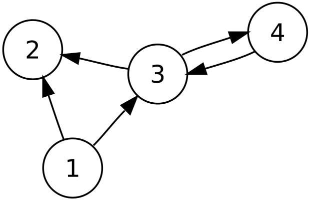
Definicja (Graf skierowany)

Grafem skierowanym (digrafem) D nazywamy parę $D = (V, E)$, gdzie V jest niepustym zbiorem wierzchołków grafu, a E pewnym zbiorem uporządkowanych par tych wierzchołków, nazywanym zbiorem krawędzi skierowanych (lub zbiorem łuków) grafu D.

Graf de Bruijna

Definicja (Graf skierowany)

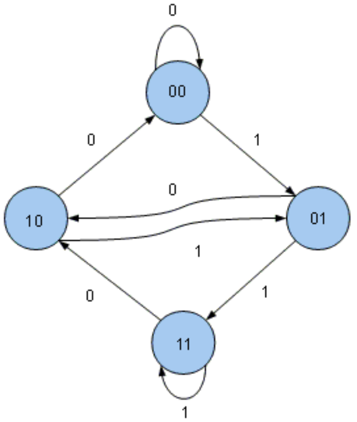
Grafem skierowanym (digrafem) D nazywamy parę $D = (V, E)$, gdzie V jest niepustym zbiorem wierzchołków grafu, a E pewnym zbiorem uporządkowanych par tych wierzchołków, nazywanym zbiorem krawędzi skierowanych (lub zbiorem łuków) grafu D.



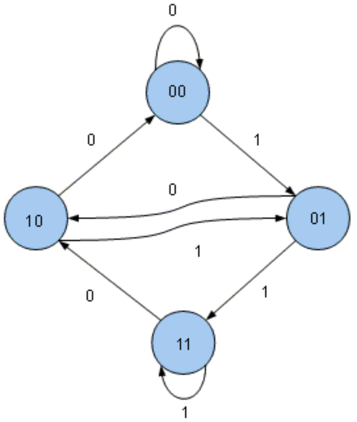
Definicja (Graf de Bruijna)

Grafem de Bruijna nazywamy skierowany graf etykietowany $G_B = (V, E)$. Wierzchołki odpowiadają wszystkim słowom długości $n-1$ nad alfabetem mocy k. Krawędź pomiędzy dwoma dowolnymi wierzchołkami $u, v \in V$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy ostatnie $n-2$ znaków słowa u zgadza się z pierwszymi $n-2$ znakami słowa v. Wówczas krawędź ta zostaje oetykietowana ostatnim znakiem v.

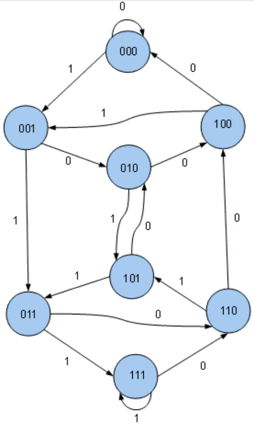
G_B dla $n = 3$, $k = 2$



G_B dla $n = 3$, $k = 2$



G_B dla $n = 4$, $k = 2$



Definicja (Obchód grafu)

Obchód grafu G to domknięty spacer przechodzący przez każdą krawędź G przynajmniej jeden raz.

Definicja (Obchód grafu)

Obchód grafu G to domknięty spacer przechodzący przez każdą krawędź G przynajmniej jeden raz.

Definicja (Obchód Eulera)

Obchód Eulera jest obchodem zawierającym każdą krawędź grafu G dokładnie jeden raz. Graf nazywamy eulerowskim (grafem Eulera) jeżeli zawiera obchód Eulera.

Twierdzenie

Graf skierowany silnie spójny (to znaczy, że dla dowolnych wierzchołków $u, v \in V$ istnieje droga z u do v) zawiera obchód Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich wierzchołków $v_i \in V$, gdzie $i \in \{1, 2, ..., |V|\}$ zachodzi następująca równość:

$$indeg(v_i) = outdeg(v_i) \ ,$$

to znaczy liczba krawędzi wchodzących i wychodzących dla danego wierzchołka jest taka sama.

Twierdzenie

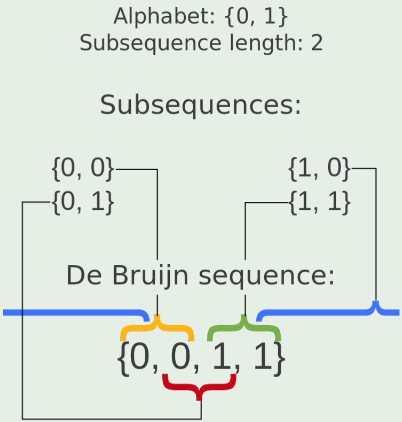
Każdy graf de Bruijna jest grafem eulerowskim.

Ciąg de Bruijna

Definicja

Ciągiem de Bruijna rzędu n nad alfabetem mocy k nazywamy cykliczny ciąg długości k^n, w którym każdy podciąg długości n występuje dokładnie raz. Oznaczamy go jako $B(k, n)$.

Przykład ($B(2,2)$)



Przykład

Ciągi de Bruijna dla kilku wybranych wartości n i k.

k	n	ciąg de Bruijna $B(k,n)$
2	1	01
2	3	01000111
3	2	110120022
4	2	1232130220011033
2	4	0000100110101111
3	3	210202220001100211120101212 2

Twierdzenie

Istnieje bijektywna odpowiedniość między ciągami etykiet krawędzi na cyklach Eulera w G_B i ciągami de Bruijna.

Tworzenie grafu G_B

(i) Wierzchołki odpowiadają wszystkim słowom długości $n-1$ nad alfabetem mocy k,

(ii) Krawędź e prowadzimy z wierzchołka $a_1a_2...a_{n-1}$ do wierzchołka $b_1b_2...b_{n-1}$ wtedy, gdy $a_2a_3...a_{n-1} = b_1b_2...b_{n-2}$,

(iii) Nadajmy krawędzi e etykietę znakiem b_{n-2}.

Tworzenie grafu G_B dla $k = 2$

(i) Wierzchołki odpowiadają wszystkim słowom binarnym długości $n-1$.

(ii) Wybierzmy wierzchołek $v = a_1 a_2 ... a_{n-1}$.

(iii) Z wierzchołka v prowadzimy krawędź z etykietą 0 do wierzchołka $a_2 a_3 ... a_{n-1} 0$.

(iv) Z wierzchołka v prowadzimy krawędź z etykietą 1 do wierzchołka $a_2 a_3 ... a_{n-1} 1$.

Wyznaczanie ciągu de Bruijna

(i) Wybieramy dowolny wierzchołek startowy v.

(ii) Wybieramy krawędź wychodzącą z v, przechodzimy do incydentnego wierzchołka u. Zapisujemy etykietę tej krawędzi.

(iii) Powtarzamy do momentu, aż przejdziemy po wszystkich krawędziach grafu dokładnie jeden raz i wrócimy do wierzchołka startowego.

(iv) Zapisany ciąg etykiet jest szukanym ciągiem de Bruijna.

Lemat

Liczba podciągów długości n ciągu de Bruijna $B(k, n)$ wynosi maksymalnie k^n.

Lemat

Liczba podciągów długości n ciągu de Bruijna $B(k, n)$ wynosi maksymalnie k^n.

Twierdzenie

Liczba podciągów długości n ciągu de Bruijna $B(k, n)$ wynosi dokładnie k^n.

Twierdzenie

Ciągi de Bruijna istnieją dla wszystkich n oraz k.

Macierz de Bruijna

Definicja

Oknem rozmiaru $u \times v$ macierzy wymiaru $n \times m$ nazywamy podmacierz wymiaru $u \times$v, która powstaje przez wybranie sąsiadujących ze sobą elementów wyjściowej macierzy.

Macierz de Bruijna

Definicja

Oknem rozmiaru $u \times v$ macierzy wymiaru $n \times m$ nazywamy podmacierz wymiaru $u \times$v, która powstaje przez wybranie sąsiadujących ze sobą elementów wyjściowej macierzy.

Przykład

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 5 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 8 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Definicja

Macierzą de Bruijna ($M_{DB}(r, v; n, m)_d$) nazywamy macierz wymiaru $r \times v$ nad alfabetem mocy d, w której każde okno rozmiaru $n \times m$ występuje dokładnie raz.

Definicja

Macierzą de Bruijna ($M_{DB}(r, v; n, m)_d$) nazywamy macierz wymiaru $r \times v$ nad alfabetem mocy d, w której każde okno rozmiaru $n \times m$ występuje dokładnie raz.

Przykład (Macierz de Bruijna $M_{DB}(4, 4; 2, 2)_2$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

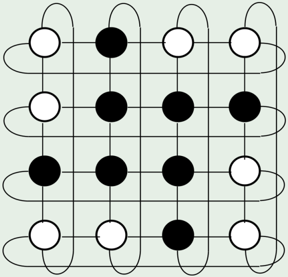
Definicja

Torusem de Bruijna ($T_{DB}(r, v; n, m)_d$) nazywamy macierz de Bruijna, w której ostatni wiersz jest przyległy do pierwszego, a ostatnia kolumna – przyległa do pierwszej.

Definicja

Torusem de Bruijna ($T_{DB}(r, v; n, m)_d$) nazywamy macierz de Bruijna, w której ostatni wiersz jest przyległy do pierwszego, a ostatnia kolumna – przyległa do pierwszej.

Przykład ($T_{DB}(4, 4; 2, 2)_2$)

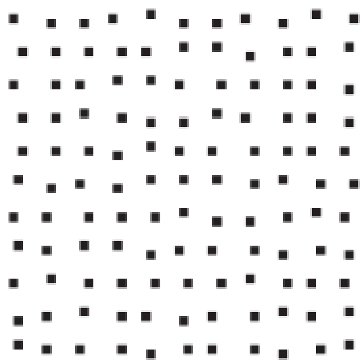


Zastosowania

(i) generowanie słów dowolnej długości nad alfabetem ustalonej mocy,
(ii) sekwencjonowanie (czyli odczytywanie kolejności par nukleotydowych w cząsteczce) łańcuchów DNA,
(iii) kodowanie wiadomości,
(iv) widzenie komputerowe,
(v) długopis cyfrowy Anoto,
(vi) rozważania teoretyczne.

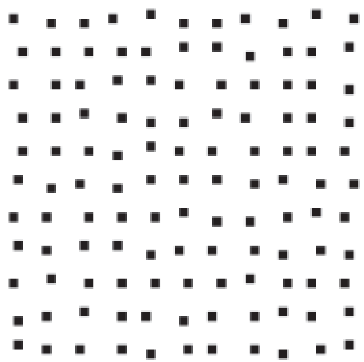
Macierz de Bruijna odporna na obracanie

Papier cyfrowy

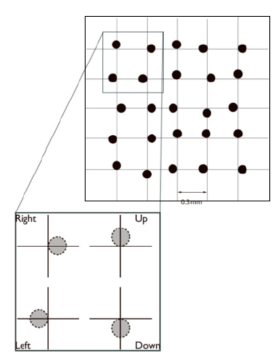


Macierz de Bruijna odporna na obracanie

Papier cyfrowy



Rozkład kropek



Definicja

Relacją przewrócenia (przewrotem) macierzy nazywamy złożenie relacji obrotu macierzy z relacją przesunięcia wartości jej elementów.

Definicja

Relacją przewrócenia (przewrotem) macierzy nazywamy złożenie relacji obrotu macierzy z relacją przesunięcia wartości jej elementów.

$\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$, $f : \Sigma \to \Sigma$:

$$f(x) = (x + 1) \mod 4\,, \mathit{dla}\, x \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Definicja

Relacją przewrócenia (przewrotem) macierzy nazywamy złożenie relacji obrotu macierzy z relacją przesunięcia wartości jej elementów.

$\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$, $f : \Sigma \to \Sigma$:

$$f(x) = (x + 1) \mod 4\,, \mathit{dla}\, x \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Przykład

Przewrotem macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ jest macierz $A^* = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Lemat

Relacja przewrotu macierzy jest relacją równoważności (to znaczy, że jest zwrotna, symetryczna i przechodnia).

Lemat

Relacja przewrotu macierzy jest relacją równoważności (to znaczy, że jest zwrotna, symetryczna i przechodnia).

Wniosek

Relacja przewrotu dzieli zbiór macierzy na rozłączne klasy abstrakcji, przy czym dowolne dwie macierze znajdują się w jednej klasie abstrakcji wtedy i tylko wtedy, gdy jedną z nich można uzyskać poprzez pewną, stałą liczbę obrotów i zmian wartości drugiej.

Lemat

Relacja przewrotu macierzy jest relacją równoważności (to znaczy, że jest zwrotna, symetryczna i przechodnia).

Wniosek

Relacja przewrotu dzieli zbiór macierzy na rozłączne klasy abstrakcji, przy czym dowolne dwie macierze znajdują się w jednej klasie abstrakcji wtedy i tylko wtedy, gdy jedną z nich można uzyskać poprzez pewną, stałą liczbę obrotów i zmian wartości drugiej.

Wniosek

W jednej klasie abstrakcji znajdują się te same macierze, z dokładnością do relacji przewrotu macierzy. W każdej klasie abstrakcji jest ich 4.

Definicja

Macierzą de Bruijna odporną na obracanie nazywamy macierz de Bruijna, której wszystkie okna danego rozmiaru pochodzą z różnych klas abstrakcji relacji przewracania macierzy. Oznaczamy ją jako: $M_{DB}^{r}(r, v)_d$, gdzie $r \times v$ jest wymiarem okna, a d liczbą elementów alfabetu.

Definicja

Macierzą de Bruijna odporną na obracanie nazywamy macierz de Bruijna, której wszystkie okna danego rozmiaru pochodzą z różnych klas abstrakcji relacji przewracania macierzy. Oznaczamy ją jako: $M_{DB}^{r}(r, v)_d$, gdzie $r \times v$ jest wymiarem okna, a d liczbą elementów alfabetu.

Fakt

Celem badań macierzy de Bruijna odpornych na obracanie jest stworzenie możliwie największej macierzy o danym oknie.

Twierdzenie

Macierz de Bruijna odporna na obracanie nad alfabetem mocy d z oknem wymiaru $n \times m$ jest maksymalnie rozmiaru $\frac{d^{n*m}}{4}$.

Twierdzenie

Macierz de Bruijna odporna na obracanie nad alfabetem mocy d z oknem wymiaru $n \times m$ jest maksymalnie rozmiaru $\frac{d^{n*m}}{4}$.

Wniosek

Macierz de Bruijna odporna na obracanie nad czteroelementowym, wcześniej zdefiniowanym alfabetem z oknem wymiaru 6×6 jest maksymalnie rozmiaru $\frac{4^{6^2}}{4} = 4^{35}$.

Ciąg de Bruijna odporny na obracanie

Definicja

Relacją przewrócenia ciągu nazywamy zmianę wartości jego wszystkich elementów, zgodnie z ustaloną funkcją.

Ciąg de Bruijna odporny na obracanie

Definicja

Relacją przewrócenia ciągu nazywamy zmianę wartości jego wszystkich elementów, zgodnie z ustaloną funkcją.

$\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$, funkcja zmiany wartości $f : \Sigma \to \Sigma$, jest postaci:

$$f(x) = (x + 1) \mod 4\,, \mathit{dla}\, x \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Ciąg de Bruijna odporny na obracanie

Definicja

Relacją przewrócenia ciągu nazywamy zmianę wartości jego wszystkich elementów, zgodnie z ustaloną funkcją.

$\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$, funkcja zmiany wartości $f : \Sigma \to \Sigma$, jest postaci:

$$f(x) = (x + 1) \mod 4\,, dla\, x \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Przykład

Przewrotem ciągu 0123 jest ciąg 1230.

Lemat

Relacja przewrotu ciągu jest relacją równoważności.

Lemat

Relacja przewrotu ciągu jest relacją równoważności.

Wniosek

Relacja przewrotu dzieli zbiór ciągów na rozłączne klasy abstrakcji, przy czym dowolne dwa ciągi znajdują się w tej samej klasie abstrakcji wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich może zostać uzyskany przez dokonanie pewnej liczby przewrotów drugiego.

Lemat

Relacja przewrotu ciągu jest relacją równoważności.

Wniosek

Relacja przewrotu dzieli zbiór ciągów na rozłączne klasy abstrakcji, przy czym dowolne dwa ciągi znajdują się w tej samej klasie abstrakcji wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich może zostać uzyskany przez dokonanie pewnej liczby przewrotów drugiego.

Wniosek

W danej klasie abstrakcji znajdują się te same ciągi, z dokładnością do przewrotu. W każdej klasie abstrakcji takich ciągów jest k, gdzie k oznacza rozmiar alfabetu, z którego pochodzą elementy ciągów.

Definicja

Ciągiem de Bruijna odpornym na obracanie nazywamy ciąg de Bruijna rzędu n nad alfabetem mocy k, którego wszystkie podciągi długości n pochodzą z różnych klas abstrakcji relacji przewracania ciągu. Oznaczamy go jako: $B^r(k, n)$

Twierdzenie

Ciąg de Bruijna odporny na obracanie rzędu n nad alfabetem mocy k jest długości maksymalnie $\frac{k^n}{4}$.

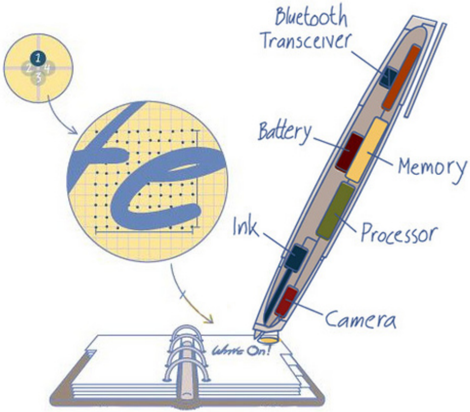
Twierdzenie

Ciąg de Bruijna odporny na obracanie rzędu n nad alfabetem mocy k jest długości maksymalnie $\frac{k^n}{4}$.

Wniosek

Ciąg de Bruijna odporny na obracanie rzędu n nad wcześniej zdefiniowanym, czteroelementowym alfabetem jest długości maksymalnie $\frac{4^n}{4} = 4^{n-1}$.

Zastosowania



Porównanie długości ciągów de Bruijna

Hipoteza

Ciąg de Bruijna odporny na obracanie rzędu n nad czteroelementowym alfabetem jest dokładnie długości $\frac{4^n}{4} = 4^{n-1}$.

1. algorytm,

1. algorytm,
2. implementacja,

1. algorytm,
2. implementacja,
3. badania,

1. algorytm,
2. implementacja,
3. badania,
4. wnioski.

QA

Pytania, sugestie, propozycje?