Twierdzenie Cauchy'ego

Twierdzenie Cauchy'ego – jedno z kilku twierdzeń o wartości średniej w rachunku różniczkowym. Ma ono ważne zastosowania teoretyczne. Pozwala między innymi oszacować błąd we wzorze Taylora oraz uzasadnić regułę de l'Hospitala. Twierdzenie Cauchy'ego jest uogólnieniem twierdzenia Lagrange'a.

Twierdzenie

Jeżeli dane funkcje f i g są:

- ciągłe w przedziale domkniętym $[a,b]$,
- różniczkowalne w przedziale (a,b) ,

to istnieje punkt c należący do przedziału (a,b) taki, że:

$$g'(c)\cdot[f(b)-f(a)]=f'(c)\cdot[g(b)-g(a)] \qquad (1)$$

Dowód

Na podstawie [2].

1. Pierwszy przypadek: $g(a)=g(b)$
   - Oznaczmy $\boldsymbol{L}=g'(c)\cdot[f(b)-f(a)], \boldsymbol{P}=f'(c)\cdot[g(b)-g(a)]$
   - Wówczas $\boldsymbol{P}=0$
   - Ponadto korzystając z twierdzenia Rolle'a: $\exists_{c\in(a,b)} g'(c)=0$
   - Więc dla powyższego c mamy: $\boldsymbol{L}=0$
   - Kończy to dowód tego przypadku, gdyż istnieje $c\in(a,b)$ takie, że: $\boldsymbol{L}=0=\boldsymbol{P}$
2. Drugi przypadek: $g(a)\neq g(b)$
   - Zdefiniujmy: $I:=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ (2)
   - Niech także: $\phi:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ będzie określone wzorem:
     $$\phi(x):=f(b)-f(x)-I\cdot[g(b)-g(x)], x\in[a,b]$$
   - Wykażemy, że ϕ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a
   - Istotnie:
   - $\phi(a)=f(b)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b)-g(a))=0$
   - $\phi(a)=f(b)-f(b)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b)-g(b))=0$
   - Wobec powyższego spełnione jest założenie $\phi(a)=\phi(b)$
   - Na mocy twierdzenia Rolle'a: $\exists_{c\in[a,b]}\phi'(c)=0$
   - Zauważmy, że: $\phi'(x)=-f'(x)+I\cdot g'(x)$
   - $0=\phi'(c)=-f'(c)+I\cdot g'(c)$
   - Więc: $f'(c)=I\cdot g'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)$
   - Kończy to dowód twierdzenia.

Wniosek

Jeżeli funkcje f i g są:

- ciągłe w przedziale domkniętym $[a,b]$, różniczkowalne w przedziale (a,b) oraz dodatkowo $g'(x)\neq 0$ dla $x\in(a,b)$

to istnieje taki punkt $c\in(a,b)$, że:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (3)$$

Bibliografia

1. Ryszard Rudnicki: *Wykłady z analizy matematycznej*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2001, s. 144.
2. G.M. Fichtenholz: *Rachunek różniczkowy i całkowy. Tom 1*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1994, s. 199.