Rafał Witkowski
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza,
Wydział Matematyki i Informatyki,
ul. Umultowska 87
61-614 Poznań,
rmiw@amu.edu.pl

Twierdzenie Cauchy'ego

24 października 2010

Streszczenie

Twierdzenie Cauchy'ego - jedno z kilku twierdzeń o wartości średniej w rachunku różniczkowym. Ma ono ważne zastosowania teoretyczne. Pozwala między innymi oszacować błąd we wzorze Taylora oraz uzasadnić regułę de l'Hospitala. Twierdzenie Cauchy'ego jest uogólnieniem twierdzenia Lagrange'a.

1. Treść twierdzenia

Poniższa treść twierdzenia została podana w oparciu o [1].

Twierdzenie 1.1 (Twierdzenie Cauchy'ego)**.** *Jeżeli dane funkcje f i g są:*

— *ciągłe w przedziale domkniętym* $[a, b]$,
— *różniczkowalne w przedziale* (a, b),

to istnieje punkt c należący do przedziału (a, b) taki, że:

$$g'(c)\,[f(b) - f(a)] = f'(c)\,[g(b) - g(a)]$$

2. Dowód twierdzenia

Dowód twierdzenia 3.1 zostanie przeprowadzony na podstawie pracy [2].

Dowód opiera się na rozpatrzeniu dwóch przypadków:

1. $g(a) = g(b)$
   Wprowadźmy oznaczenia:
   $$L = g'(c)\,[f(b) - f(a)]$$
   $$P = f'(c)\,[g(b) - g(a)]$$
   W tym przypadku oczywiście $P = 0$. Ponadto korzystając z twierdzenia Rolle'a:
   $$\exists_{c\in(a,b)} g'(c) = 0$$
   Więc dla powyższego c mamy $L = 0$. Kończy to dowód tego przypadku, gdyż istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $L = 0 = P$.
2. $g(a) \neq g(b)$
   Zdefiniujmy teraz:
   $$I = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$
   Niech funkcja $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem:
   $$\phi(x) = f(b) - f(x) - I[(g(b) - g(x)]$$
   Wykażemy, że funkcja ϕ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a. Istotnie:
   $$\phi(a) = f(b) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right)\{g(b) - g(a)\} = 0$$
   $$\phi(b) = f(b) - f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right)\{g(b) - g(b)\} = 0$$
   Wobec powyższego spełnione jest założenie $\phi(a) = \phi(b)$. Na mocy twierdzenia Rolle'a:
   $$\exists_{c\in(a,b)} \phi'(c) = 0$$
   Zauważmy, że:
   $$\phi'(x) = -f'(x) + Ig'(x)$$
   Biorąc pod uwagę, że $\phi'(x) = 0$ otrzymujemy:
   $$\phi'(c) = -f'(c) + Ig'(c)$$
   $$f'(c) = Ig'(c)$$
   $$f'(c) = Ig'(c)$$
   $$f'(c) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right) g'(c)$$
   Kończy to dowód twierdzenia.

3. Wniosek

Poniższy wniosek wynika wprost z twierdzenia 3.1 podanego w rozdziale 1, a udowodnionego w rozdziale 2.

Wniosek 3.1 (Twierdzenie Cauchy'ego)**.** *Jeżeli dane funkcje f i g są:*

— *ciągłe w przedziale domkniętym* $[a, b]$,
— *różniczkowalne w przedziale* (a, b),
— $g'(x) \neq 0$ *dla pewnego* $x \in (a, b)$

to istnieje punkt c należący do przedziału (a, b) *taki, że:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Literatura

[1] R. Rudnicki: *Wykłady z analizy matematycznej.*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2001, s. 144.
[2] G.M. Fichtenholz: *Rachunek różniczkowy i całkowy. Tom 1.*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1994, s. 199.