MULTIKOLOROWANIE GRAFÓW

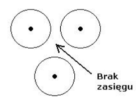
RAFAŁ WITKOWSKI

STRESZCZENIE. Problem multikolorowania grafów jest uogólnieniem problemu kolorowania grafów. Różnica polega na tym, że zamiast jednego,S każdemu wierzchołkowi przypisuje się zbiór kolorów w taki sposób, by każde wierzchołki połączone krawędzią posiadały rozłączne zbiory. W dziedzinie multikolorowania najważniejszym problemem jest kolorowanie podgrafów indukowanych pokryć trójkątnych płaszczyzny – grafów heksagonalnych. Algorytmy rozwiązujące to zadanie wykorzystuje się w problemie przydziału częstotliwości w sieciach komórkowych. W pracy przedstawiony zostanie szkic autorskiego algorytmu 2-lokalnego aproksymującego rozwiązanie z dokładnością $\frac{4}{3}$ w stosunku do ważonej liczby klikowej. Dodatkowo wspomniane zostaną powiązania tego zagadnienia z problemem k-dobroci grafów heksagonalnych bez trójkątów. Przedstawiona zostanie hipoteza McDiarmida-Reeda mówiąca o tym, że każdy graf heksagonalny bez trójkątów jest 9-dobry oraz jej wpływ na problem przydziału częstotliwości w sieciach komórkowych.

WSTĘP

Każdy z nas, nawet jeśli nie posiada osobiście, to na pewno kiedyś używał telefonu komórkowego. Niewielu jednak pewnie zastanawiało się, jak to się dzieje, że telefon dzwoni, ktoś odbiera, po czym można ze sobą rozmawiać. W artykule tym bynajmniej nie zostaną poruszone kwestie technicznego działania aparatu telefonicznego, a jedynie problem przydziału częstotliwości fal, na których odbywają się owe rozmowy.
Na czym polega nawiązanie połączenia przy pomocy telefonu komórkowego? Aparat na początku wysyła na niskich częstotliwościach (tanich i mało energochłonnych, ale nie nadających się do przeprowadzania rozmów) informację do najbliższej stacji bazowej o próbie nawiązania połączenia. Stacja bazowa drogą naziemną komunikuje się z innymi stacjami bazowymi w celu zlokalizowania odbiorcy połączenia. Gdy oba telefony są już zlokalizowane, stacje bazowe, w zasięgu których się znajdują, muszą obu telefonom nadać pewną wysoką częstotliwość, na której będą prowadziły rozmowę. Problem w tym jak mają to zrobić? O tym właśnie traktuje ta praca.
Każdy operator sieci komórkowych dysponuje pewną określoną liczbą częstotliwości na których może prowadzić rozmowy. Oczywiście każdemu zależy, żeby zajmowanych częstotliwości było jak najmniej, gdyż za te używane się płaci. Dlaczego jednak nie można przydzielać częstotliwości po postu po kolei z danego pasma, tyle ile potrzeba w zasięgu danej stacji bazowej? Otóż zasięgiem działania każdej stacji bazowej są koła. Aby nie było miejsc bez zasięgu koła te muszą na siebie zachodzić. Problem pojawia się z rozmowami, które odbywają się na obszarach przecinania się takich kół.

Gdyby dwie rozmowy w sąsiednich stacjach bazowych odbywały się na tej samej częstotliwości, a akurat zdarzyłoby się tak, że obie rozmawiające osoby znajdowałyby się w tym samym, wspólnym, nachodzącym na siebie obszarze, wówczas obie te osoby słyszałyby dwie rozmowy – swoją i tą drugą, lub doszłoby do dużych interferencji. Nawet gdyby dodać, jak to się czasem dzieje, odpowiednie kodowanie tychże rozmów, niewiele by to pomogło, gdyż zachodzące interferencje powodowałyby uciążliwe zakłócenia rozmowy.
Sytuację dobrze ilustrują poniższe rysunki:



Rysunek 1. Sytuacja złego rozłożenia stacji bazowych – występuje brak zasięgu

Rysunek 2. Prawidłowe rozłożenie sieci radiowych – występują obszary interferentne

Gdyby dwie rozmowy odbywały się w czerwonym obszarze na powyższym rysunku, jedna w jednej stacji bazowej, a druga w drugiej, wówczas zachodziłyby interferencje. Tak więc te rozmowy muszą dostać osobne częstotliwości.
Stwórzmy zatem graf w taki sposób, że wierzchołki będą odpowiadać stacjom bazowym, a krawędzie będą oznaczały, że zawierają one obszar wspólnego zasięgu. Wówczas, jeśli każdej stacji trzeba by było przypisać jedną częstotliwość, to problem ich przydziału byłby tożsamy z problemem kolorowania grafów. Każdy z nas jednak wie, że w jednej stacji bazowej może odbywać się wiele rozmów naraz. Zatem tych przydzielanych częstotliwości (kolorów) powinno być więcej niż jeden. Oznacza to, że do każdego wierzchołka należy przypisać nie jeden, ale pewien zbiór kolorów (którego liczność jest określona przez liczbę rozmów) w taki sposób, aby sąsiednie wierzchołki nie posiadały w swoich zbiorach tego samego koloru. I na tym właśnie polega problem multikolorowania grafów.
Warto jeszcze dodać jakie grafy się multikoloruje w zagadnieniu przydziału częstotliwości. Otóż okazuje się, że optymalnym rozłożeniem stacji bazowych, aby było jak najmniej interferentnych ze sobą obszarów, a zarazem cała powierzchnia była pokryta (wszędzie był zasięg), jest takie ich ułożenie, aby tworzyły one pokrycie trójkątne owej płaszczyzny. Łatwo to zresztą sprawdzić, próbując samemu skonstruować takie pokrycie kołami płaszczyzny, aby cała płaszczyzna była pokryta, a graf był możliwie łatwo kolorowalny, bo za tym idzie także łatwość multikolorowania. Podgraf indukowany takiego optymalnego pokrycia zwany jest grafem heksagonalnym, a jego szczegółowa

definicja znajduje się w kolejnym rozdziale. Co bardzo ważne, graf ten jest trójdzielny, a więc bardzo łatwo go pokolorować. Niestety nie da się stworzyć dobrego grafu dwudzielnego.

1. Podstawowe pojęcia

Definicja 1. *Grafem z ważeniem* nazywamy graf $G_w := (V, E, w)$, w którym $w : V \to \mathbb{N}$ jest funkcją przypisującą każdemu wierzchołkowi pewną liczbę naturalną nazywaną *wagą wierzchołka.*
Graf z ważeniem w oznaczać będziemy przez G_w (choć najczęściej po prostu G , a to, że jest ważony będzie wynikać z kontekstu), a wagę wierzchołka v oznaczać będziemy przez $w_G(v)$ (częściej $w(v)$).

Definicja 2. *Multikolorowaniem* grafu z ważeniem G_w nazywamy taką funkcję Ψ, która dla pewnego zbioru kolorów C, każdemu wierzchołkowi przypisuje pewien podzbiór tego zbioru ($\Psi : V(G) \to 2^C$) tak, aby zachowane były następujące warunki:

(i) $\forall_{v \in V(G)} |\Psi(v)| = w(v)$, czyli do każdego wierzchołka przypisujemy $w(v)$ różnych kolorów,
(ii) $\forall_{uv \in E(G)} \Psi(u) \cap \Psi(v) = \emptyset$, czyli dwóm sąsiednim wierzchołkom przypisujemy rozłączne zbiory kolorów.

Definicja 3. Najmniejszą liczbę kolorów, czyli najmniejszą moc zbioru C, który potrzebny jest do prawidłowego pokolorowania grafu zgodnie z definicją 2, nazywamy *liczbą multichromatyczną.*
Liczbę multichromatyczną oznaczamy przez $\chi_m(G)$.

Uwaga 4. Problem multokolorowania grafów można bardzo łatwo przetransponować na problem klasycznego kolorowania grafów. Prawidłowe multikolorowanie grafu G jest tym samym, co zwykłe kolorowanie grafu G' powstałego z G przez zastąpienie każdego wierzchołka $v \in V(G)$ kliką $K(v)$ o rozmiarze $w(v)$ oraz stworzenie krawędzi pomiędzy każdymi dwoma wierzchołkami klik $K(v)$ i $K(u)$ wtedy, gdy wierzchołki v i u były połączone krawędzią w G .

Definicja 5. Przez *wagę kliki* rozumieć będziemy sumę wag wszystkich wierzchołków należących do danej kliki w grafie G .

Definicja 6. *Ważoną liczbą klikową* grafu G nazywamy największą wagę kliki spośród wszystkich klik w grafie G .
Ważoną liczbę klikową oznaczmy przez $W(G)$.

Definicja 7. *Ważoną liczbą t-klikową* grafu G nazywać będziemy nazywać największą wagę kliki spośród klik o rozmiarze nie większym niż t, a oznaczać będziemy przez $W_t(G)$. Innymi słowy:

$$W_t(G) := \max\{W(K) : K \subset G, K \text{ jest kliką}, |K| \leqslant t\}$$

Definicja 8. *Pokryciem trójkątnym* nazywać będziemy nieskończony graf zanurzony w $\mathbb{R}^2$, który zdefiniowany jest w następujący sposób:

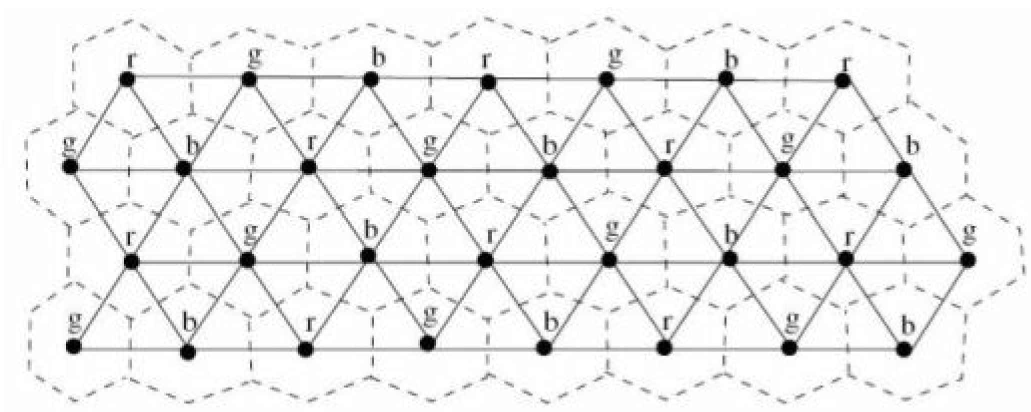
Zbiorem wierzchołków tego grafu są punkty na płaszczyźnie, których współrzędne są kombinacjami liniowymi $x\vec{p} + y\vec{q}$, dla każdych $x, y \in \mathbb{Z}$ oraz wektorów

$$\vec{p} = (1, 0), \vec{q} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

Dwa wierzchołki łączy krawędź, jeśli na płaszczyźnie ich odległość Euklidesowa jest równa dokładnie 1.
Widać więc łatwo, że każdy wierzchołek (x, y) ma dokładnie sześciu sąsiadów: $(x+1, y), (x-1, y), (x, y+1), (x, y-1), (x+1, y-1), (x-1, y+1)$. Sąsiadów tych nazywać będziemy odpowiednio: *prawym, lewym, prawym-górnym, lewym-dolnym, prawym-dolnym* i *lewym-górnym.*

Uwaga 9. Każdy wierzchołek pokrycia trójkątnego możemy utożsamiać z parą liczb całkowitych (x, y), które wyznaczają kombinację liniową wektorów p i q tworzącą ten wierzchołek.

Definicja 10. *Grafem heksagonalnym* nazywamy dowolny graf będący indukowanym podgrafem pokrycia trójkątnego. Przykład takiego grafu można zobaczyć na rysunku 1.



Rysunek 3. Przykład grafu heksagonalnego z odpowiadającym mu 3-kolorowaniem

Obserwacja 11. *Każdy graf heksagonalny da się pokolorować klasycznie przy pomocy trzech kolorów (zobacz rys. 1). Co więcej, kolorowanie to wynika bezpośrednio ze współrzędnych na pokryciu trójkątnym – każdy wierzchołek otrzymuje kolor* $x + 2y \bmod 3$.

Uwaga 12. Graf heksagonalny jest najlepszym modelem matematycznym optymalnej sieci komórkowej. Rozmieszczając nadajniki w taki sposób, aby przy jak najmniejszej ich liczbie pokryć jak największą powierzchnię, robi się to właśnie w taki sposób, jaki widać na rysunku 1. Każdy nadajnik ma pewien zasięg, który jest kołem o promieniu

r. Na rysunku linią przerywaną zostały oznaczone obszary, które są najbliżej danego nadajnika. Łatwo się jednak domyślić, że nadajniki nie mają zasięgu o kształcie sześciokąta, stąd krawędzie znajdują się tam, gdzie odpowiednie koła, będące ich zasięgami, się pokrywają.
Patrząc na rysunek 1 widać również, skąd wzięła się nazwa „telefonia komórkowa".

2. Znane oszacowania

2.1. **Oszacowania liczby multichromatycznej.** Co ciekawe, na liczbę multichromatyczną nie istnieją dobre oszacowania. Oczywiście prawdziwa jest bardzo prosta obserwacja:

Obserwacja 13. *Dla każdego grafu G z ważeniem prawdziwa jest nierówność:*

$$\chi_m(G) \geqslant W(G)$$

Warto też zauważyć, że w przypadku grafu heksagonalnego $W(G) = W_3(G)$.
Dla dowolnych grafów o oszacowaniach liczby multichromatycznej z dołu nic więcej nie wiadomo. Z góry można ją również trywialnie oszacować przez sumę wag najcięższych wierzchołków w zbiorach niezależnych, na które ten graf można rozłożyć. I to jest jedyne znane oszacowanie w przypadku ogólnym.
Algorytmy dobrego multikolorowania znane są tylko dla najprostszych rodzajów grafów takich jak grafy dwudzielne, cykle, grafy zewnątrzplanarne. Istnieje szereg prac o multikolorowaniu grafów planarnych, bądź innych, specyficznych rodzajów grafów, jednak nie ma dobrych oszacowań ogólnych.

Najwięcej jednak uwagi, ze względu na zastosowania, poświęca się grafom heksagonalnym. Po chwili namysłu widać dla nich zależność, którą nietrudno udowodnić, a którą to przyjemność pozostawiam czytelnikowi:

Zadanie 14. *Dla każdego grafu heksagonalnego G prawdziwa jest nierówność:*

$$\chi_m(G) \geqslant \frac{9W_3(G)}{8}$$

`Podpowiedź:` *Trzeba zauważyć, że najmniejszy nieparzysty cykl w grafie heksagonalnym, oprócz trójkąta, ma długość 9 i spróbować go multikolorować.*

Znane są też oszacowania górne na liczbę multichromatyczną, a które wynikają głównie z algorytmów znajdujących te multikolorowania. Istnieje także hipoteza, że $\frac{9W_3(G)}{8}$ jest nie tylko oszacowaniem górnym, ale i dolnym na multikolorowanie grafów heksagonalnych, niestety wciąż nieudowodniona. Szczegóły zostaną opisane w ostatnich dwóch rozdziałach.

2.2. **Oszacowania algorytmów przybliżających rozwiązanie przydziału częstotliwości.** Najważniejsze w zastosowaniach jest nie tyle szacowanie liczby multichromatycznej, co konstruktywne, algorytmiczne znajdywanie multikolorowania (a co za tym idzie także χ_m). Istnieje wiele algorytmów i wiele prac na ten temat. Na wstępie jednak warto wspomnieć o kilku obostrzeniach, jakie na takie algorytmy chcielibyśmy

nałożyć, żeby były one zadowalające z punktu widzenia problemu praktycznego przydziału częstotliwości.
Przede wszystkim algorytmy te powinny być szybkie. I to na tyle szybkie, żeby w baaardzo dużej sieci komórkowej oplatającej cały świat nie trzeba było czekać zbytnio na nawiązanie połączenia. Powinny być na tyle szybkie, żeby działać w czasie $O(1)$, a więc niezależnie od rozmiaru sieci i liczby nawiązywanych połączeń. Dodatkowo algorytmy powinny działać w sposób równoległy, tak aby każda stacja bazowa mogła niezależnie wykonywać swoją część algorytmu i samodzielnie decydować jakie częstotliwości przydzielić rozmowom odbywającym się za jej pośrednictwem. Co za tym wszystkim idzie, stacje bazowe nie powinny ze sobą komunikować się za bardzo. Do określania tego, jak bardzo się ze sobą komunikują służy następujące pojęcie:

Definicja 15. Algorytm nazywamy k-*lokalnym*, jeśli stacja bazowa zna funkcję swoją wagi oraz wierzchołków oddalonych od siebie ścieżką długości nie większej niż k.

k-lokalność to główny sposób podziału algorytmów w zagadnieniach przydziału częstotliwości. Istnieją osobne algorytmy dla każdego k. Im mniejsze k tym algorytm jest lepszy, ale oczywiście tym gorzej da się ograniczyć liczbę potrzebnych kolorów. Ograniczenie na liczbę używanych kolorów określa się zawsze w stosunku do $W(G)$. Najlepsze znane algorytmy (oszacowania na liczbę używanych przez nie kolorów), w zależności od k-lokalności, oraz rok ich powstania i praca w której się znajdują, są podane w poniższej tabelce:

k-lokalność	oszacowanie	rok, praca
0	3	2000 [5]
1	$\frac{13}{9}$	czerwiec 2007 [10]
2	$\frac{4}{3}$	2005 [6] i niezależnie 2006 [7]
$\geqslant 3$	$\frac{4}{3}$	2005 [6]
∞	$\frac{4}{3}$	2001 [3]

Tabela 1. Najlepsze znane algorytmy dla multikolorowania grafów heksagonalnych

Wynik dla 0-lokalności jest oczywisty po chwili namysłu. Wynik dla 1-local został opublikowany bardzo niedawno, a zastosowano w nim zupełnie inne podejście do problemu (mocne poprawienie kolorowania grafu heksagonalnego bez trójkątów). Na UAM w Poznaniu prowadzimy intensywne prace, aby zastosować tę metodę do innych algorytmów, jeszcze je ulepszając. Wynik dla 2-lokalności udało się uzyskać mi wspólnie z Krzysztofem Krzywdzińskim, wcześniej jednak niezależnie ukazała się praca [6] i to jest wynik wzorcowy w tej dziedzinie. Dla większych lokalności nie znane są lepsze algorytmy od tego, który działa dla 2-lokalności. Co więcej, nie są znane żadne lepsze algorytmy nawet znając globalne własności tego grafu i całą jego strukturę (roboczo oznaczam to w swoich pracach jako ∞-lokalność).
Jak widać po datach, algorytmy te są niemal ciągle ulepszane, a metody, którymi operują algorytmy wskazują, że można będzie uzyskać jeszcze wiele lepszych wyników. Ukazuje się również bardzo dużo prac na temat multikolorowania pewnych klas podgrafów grafów heksagonalnych, wśród których najbardziej popularnymi są grafy heksagonalne bez trójkątów.

3. Algorytm 2-lokalny $\frac{4}{3}$ multikolorowania grafów heksagonalnych

W rozdziale tym przestawiony zostanie bardzo ogólny szkic algorytmu 2-lokalnego $\frac{4}{3}$ multikolorowania grafów heksagonalnych. Został on opracowany przeze mnie wspólnie z Krzysztofem Krzywdzińskim i opisany w [7]. Jego główna idea (podobnie zresztą jak algorytmu opisanego w [6]) pochodzi z pracy [3], a dokładnie jest przerobieniem wersji opisanego tam algorytmu, który korzystał z wartości ważonej liczby klikowej, a do której obliczenia potrzebujemy wiedzy globalnej o całym grafie. Kluczowym miejscem i ulepszeniem naszego algorytmu w stosunku do tamtego jest wprowadzenie funkcji:

Definicja 16. Określmy następująco *funkcję bazową*:

$$k : V(G) \to \mathbb{N}$$

$$k(v) = \left\lceil \frac{\max\{w(v) + w(x) + w(y) : (x, v), (y, v), (x, y) \in E(G)\}}{3} \right\rceil$$

Jak widać jest to funkcja, która lokalnie zachowuje się tak samo, jak wartość $W(G)$. Można o niej myśleć jak o średniej wadze najcięższego trójkąta, w jakim znajduje się dany wierzchołek.
Podobnie, jak w pracy [3] algorytm składa się z 5 faz, z których każda zostanie przeze mnie opisana, natomiast pominiemy w tym miejscu dowód ich poprawności (można go znaleźć w [7]). Do określenia tych faz potrzebne będą następujące definicje:

Definicja 17. *Kolorowaniem bazowym* grafu ważonego G nazywamy klasyczne 3-kolorowanie tego grafu, nie biorącego pod uwagę funkcji wagi określonej na wierzchołkach G .
Kolorem bazowym wierzchołka v nazywamy kolor, który otrzymał on przy kolorowaniu bazowym.

Definicja 18. *Zbiorem bazowym* wierzchołka v nazywamy zbiór kolorów $B(v)$ o mocy $k(v)$ przypisanych do tego wierzchołka i zależnych od koloru bazowego wierzchołka. Możemy je zapisać w postaci $B(v) = \{x, c(v) : x \in \{1 \dots k(v)\}, c(v)$ – kolor bazowy wierzchołka $v)\}$.
Dodatkowo *zbiorem pomocniczym* będziemy nazywać zbiór $P(v)$ o mocy $k(v)$ rozłączny ze zbiorami bazowymi kolorów. Możemy go zapisać w postaci $P(v) = \{x, c : x \in \{1 \dots k(v)\}, c$ – kolor różny od kolorów bazowych w grafie $G)\}$.

Definicja 19. Niech $G_i = (V_i, E_i, w_i)$ oznacza graf otrzymany po zakończeniu i-tej fazy. Nazywać go będziemy *i-grafem.*

Definicja 20. Wierzchołek $v \in G$ nazywać będziemy *lekkim*, jeśli $w(v) \leqslant k(v)$. W przeciwnym przypadku wierzchołek nazwiemy *ciężkim.*

Definicja 21. Dla każdego wierzchołka $v \in G$ przez *parzystość wzdłuż osi* OX rozumiemy parzystość długości ścieżki biegnącej równolegle do osi OX między wierzchołkiem v, a wierzchołkiem położonym na osi leżącej pod kątem $\pi/3$, tej samej na której położony jest początek układu współrzędnych (wierzchołek $(0, 0)$).
Analogicznie *parzystość wzdłuż osi* $\pi/3$ $(2\pi/3)$ będzie parzystością długości ścieżki

biegnącej równolegle do osi $\pi/3$ $(2\pi/3)$ między wierzchołkiem v, a wierzchołkiem położonym na osi OX, tej samej na której położony jest początek układu współrzędnych.

Do prawidłowego przebiegu algorytmu potrzebne będzie także określenie ważności poszczególnych wierzchołków:

Definicja 22. Do każdego koloru bazowego przypiszmy odpowiednie *priorytety*. I tak wierzchołki czerwone będą ważniejsze niż niebieskie, niebieskie ważniejsze niż zielone, natomiast zielone ważniejsze niż czerwone.

Zdefiniujmy teraz po krótce kolejne fazy algorytmu:

Faza 1:

Do każdego wierzchołka $v \in G$ przypisujemy pierwsze $w(v)$ kolorów z jego zbioru bazowego. W szczególności każdy wierzchołek dostaje kolory $[1, \ldots, \min\{w(v), k(v)\}]$. Graf G_1 zdefiniujemy jako podgraf indukowany na wierzchołkach ciężkich, z których każdy będzie miał wagę pomniejszoną o $k(v)$.

Dzięki tej operacji wszystkie wierzchołki lekkie zostaną całkowicie pokolorowane. Graf G_1 będzie grafem heksagonalnym bez trójkątów.

Definicja 23. Niech H będzie indukowanym podgrafem G_1, który zawiera wszystkie wierzchołki o stopniu 3. Wierzchołek $v \in H$ nazwiemy *wierzchołkiem priorytetowym* jeśli jest on ważniejszy od wszystkich swoich sąsiadów (w myśl definicji 22)

Fakt 24. *Wszystkie wierzchołki priorytetowe z grafu H tworzą zbiór niezależny. Co więcej, zbiór ten jest zbiorem dominującym grafu H.*

Faza 2:

Rozpatrzmy wierzchołek priorytetowy $v \in H$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że v ma kolor czerwony, a jego trzej sąsiedzi z H są koloru niebieskiego. Niech $g(v)$ będzie najmniejszą wartością spośród wartości $k(x) - w(x)$ trzech zielonych sąsiadów v. v może pożyczyć od nich ostatnie $g(v)$ kolorów z zielonego zbioru bazowego i zostać w pełni pokolorowany. Graf G_2 tworzymy z grafu G_1 poprzez usunięcie z niego wierzchołków priorytetowych $v \in H$ (z def. 23).

Każdy wierzchołek w grafie G_2 ma stopień co najwyżej 2.

Definicja 25. Narożnik $v \in G_2$ nazwiemy *narożnikiem priorytetowym* jeśli jest on ważniejszy od wszystkich swoich sąsiadów (w myśl definicji 22), którzy również są narożnikami. Jeśli żaden z jego sąsiadów nie jest narożnikiem to również jest on priorytetowym.

Fakt 26. *Wszystkie narożniki priorytetowe z grafu G_2 tworzą zbiór niezależny. Co więcej, podzbiór narożników priorytetowych z grafu G_2 tworzy zbiór dominujący w podgrafie indukowanym na narożnikach z G_2.*

Faza 3:

Wszystkim narożnikom priorytetowym przypisujemy odpowiednie kolory ze zbiorów bazowych ich sąsiadów, oraz sąsiadów ich sąsiadów w pewien specyficzny sposób $\left(^1\right)$.

$\left(^1\right)$ opis tego sposobu zajmuje więcej niż cały ten artykuł w takiej postaci, więc go w tym miejscu pomijam. Można go znaleźć w pracy [7]

Graf G_3 tworzymy z grafu G_2 poprzez usunięcie z niego narożników priorytetowych (z def. 25).

Fakt 27. *Każda składowa spójności grafu G_3 jest albo wierzchołkiem izolowanym, albo ścieżką, której wierzchołki leżą na linii prostej (każde dwie krawędzie incydentne z tym samym wierzchołkiem w pokryciu trójkątnym tworzą kąt π).*

Fakt 28. *Dla każdego wierzchołka izolowanego $v \in G_3$ spełniona jest nierówność:*

$$1 \leqslant w_3(v) \leqslant 2k(v)$$

a dla każdego wierzchołka z należącego do jakiejś ścieżki prawdziwa jest nierówność:

$$w_3(z) \leqslant k(z)$$

Faza 4:
Każdemu izolowanemu wierzchołkowi $v \in G_3$ przypisujemy $\min\{w_3(v), k(v)\}$ kolorów z pomocniczego zbioru. Jeśli $w_3(v) > k(v)$ wówczas dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że jest to wierzchołek czerwony. v może pożyczyć brakujące kolory z niebieskiego i zielonego zbioru bazowego bez powodowania konfliktów w multikolorowaniu. Graf G_4 tworzymy poprzez usunięcie z grafu G_3 wierzchołków izolowanych.

Faza 5:
Każdą ścieżkę w grafie G_4 kolorujemy używając odpowiedniego algorytmu do kolorowania grafów dwudzielnych opisanego w pracach [3] i [9]. Dwupodział jest nam dany dzięki definicji 21.

Po tej fazie mamy właściwie pomultikolorowany cały graf w czasie stałym przy użyciu nie więcej niż $\left\lceil \frac{4}{3} W(G) \right\rceil$ kolorów. Można go zaimplementować jako algorytm równoległy w taki sposób, żeby każdy procesor wymieniał stałą liczbę wiadomości z każdym ze swoich sąsiadów.

4. Grafy k-dobre

Jeśli uważnie przypatrzymy się algorytmowi z poprzedniego rozdziału, a także wszystkim innym alorytmom opisanym w pracach [1], [2], [3], [5], [6] ,[10] zauważymy, że w istotny sposób pojawiają się tam grafy heksagonalne bez trójkątów.
Już na samym początku Colin McDiarmid i Bruce Reed zauważyli, że grafy te mają bardzo ciekawe własności i mogą być bardzo istotne w problemie przydziału częstotliwości. Wprowadzili oni bardzo ciekawą definicję, którą chciałbym tu przytoczyć.

Definicja 29. Przypisanie $\Psi : V \to \{1, \ldots, k\}$ nazywamy *dobrym* w G , jeśli dla każdego nieparzystego cyklu w G , dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$, istnieje wierzchołek $v \in V$ w tym cyklu taki, że $\Psi(v) = i$.
Graf G nazywamy *k-dobrym* jeśli takie pokolorowanie w G istnieje.

Lemat 30. *Jeśli graf heksagonalny bez trójkątów jest grafem k-dobrym, wtedy istnieje jego multikolorowanie o liczbie multichromatycznej $2k$ dla dowolnego grafu heksagonalnego takie, że każdy wierzchołek otrzymuje $k-1$ kolorów.*

Dowód tego lematu można znaleźć w pracy [4].

Co oznacza powyższy lemat? Jeśli stwierdzimy, że graf jest 9-dobry, to każdy graf heksagonalny da się pokolorować nie więcej niż $\left\lceil \frac{9}{8} W(G) \right\rceil + o(1)$. (W jaki to sposób zachodzi pozostawiam jako ćwiczenie dla czytelnika.) To jednak, czy tak jest, czy tak nie jest, niestety wciąż jest nierozstrzygnięte. Dopóki tego nie wiadomo trzeba zadowolić się twierdzeniami, które są już znane oraz oszacowaniami z nich wynikającymi.

Co więcej, jeśli znajdziemy konstrukcję takiego k-dobrego kolorowania istnieje w czasie $O(k)$ (a więc praktycznie stałym) konstrukcja multikolorowania grafu heksagonalnego $\left\lceil \frac{k}{k-1} W(G) \right\rceil + o(1)$ kolorami.

Zaraz po wprowadzeniu definicji prawdziwy przy pomocy elementarnych metod okazał się następujący fakt:

Fakt 31. *Każdy graf heksagonalny bez trójkątów jest 5-dobry.*

W roku 2006 opublikowany został także dowód następującego twierdzenia:

Twierdzenie 32. *Każdy graf heksagonalny bez trójkątów jest 7-dobry.*

Dowód, a także kontrukcję (!) w czasie O(n) – liczby wierzchołków, można znaleźć w pracy [4].
Natomiast wciąż nierozwiązana pozostaje bardzo ważna hipoteza:

Hipoteza 33 (C. McDiarmid, B. Reed, 1999)**.** *Każdy heksagonalny graf bez trójkątów jest 9-dobry.*

5. Podsumowanie

Reasumując, problem multikolorowania grafów, a w szczególności przydziału częstotliwości, jest problemem bardzo ciekawym, a jednocześnie szalenie rozwojowym. W przeciągu ostatnich kilku lat w zasadzie co roku pojawiają się prace, które w istotny sposób poprawiają wcześniejsze wyniki. Wiele szlaków jest jeszcze z pewnością nieprzetartych, wiele twierdzeń do udowodnienia, wiele algorytmów do usprawnienia. Najważniejszym problemem otwartym w dziedzinie multikolorowania jest właśnie pytanie o oszacowanie górne na liczbę multichromatyczną, zwłaszcza grafów heksagonalnych. Jak już wspomniane zostało wcześniej istnieje hipoteza, że jest to $\frac{9}{8} W(G)$.

Hipoteza 34. *Dla każdego grafu heksagonalnego G prawdziwa jest nierówność:*

$$\chi_m(G) \leqslant \frac{9W(G)}{8} + o(1)$$

Hipoteza ta jest równoważna hipotezie 33. Dotychczasowe wysiłki matematyków kierują się właśnie w stronę rozwiązania hipotezy 33. Gdyby okazała się ona prawdziwą, wówczas wiedzielibyśmy, że z dokładnością do pewnej stałej (ale nie większej niż 18, co wynika z uważnego przestudiowania prac [2] i [4]) dla każdego grafu heksagonalnego zachodzi równość:

$$\chi_m(G) = \frac{9W(G)}{8}$$

Niestety wszystkie dotychczasowe próby jej udowodnienia na nic się zdały, a nawet wydaje się, że obecnie matematycy nie są nawet choćby blisko tej hipotezy. Być może czeka ona na zastosowanie jakiś zaawansowanych narzędzi z poza dziedziny teorii grafów. Niemniej może być motorem napędowym do rozwijania się matematyki.

Oprócz grafów heksagonalnych także inne rodzaje grafów są bardzo istotne. Uważny czytelnik na pewno zwróci uwagę na to, że sieć radiowa nie zawsze będzie mogła być skonstruwana w taki sposób, aby tworzyła idealny graf heksagonalny. W terenach górzystych, bądź wysoko zurbanizowanych, graf będzie musiał wyglądać zupełnie inaczej, żeby podstawowe zadania telefonii komórkowej mogły być spełnione. W praktyce zawsze dąży się do uzyskania grafu idealnie heksagonalnego, niemniej często zdarza się, że jego struktura jest znacząco zaburzona, a to sprawia, że standardowe, wspomniane wcześniej algorytmy nie nadają się w takim przypadku do multikolorowania takiej sieci. Dlatego też bardzo ważnym kierunkiem rozwoju dziedziny multikolorowania będzie oszacowanie liczby multichromatycznej, a także znalezienie dobrych algorytmów do multikolorowania innych rodzajów grafów. Najbardziej oczekiwanym wynikiem byłoby jakieś twierdzenie dla grafów planarnych, na wzór twierdzenia o czterech kolorach. Jedyne znane nietrywialne oszacowanie jakie znamy dla grafów planarnych to:

Twierdzenie 35. *Dla każdego grafu planarnego G zachodzi nierówność:*

$$\chi_m(G) \leqslant \left\lceil \frac{11}{6} W(G) \right\rceil$$

Niestety dowód korzysta w istotny sposób z twierdzenia o czterech kolorach, co, jak wiadomo, wielu matematykom nie odpowiada.
Inny warty zauważenia rezultat to następujące twierdzenie:

Twierdzenie 36. *Dla każdego grafu G , który jest k-kolorowalny i nie posiada izolowanych wierzchołków, zachodzi nierówność:*

$$\chi_m(G) \leqslant \frac{k}{2} W_2(G)$$

Poza tymi oszacowaniami, a także wynikami dokładnymi dla cykli, grafów dwudzielnych, grafów zewnątrzplanarnych, w zasadzie niewiele wiadomo na temat multikolorowania w ogóle.
Co ciekawe, wspomniane przeze mnie wcześniej wyniki, w zasadzie niemal wszystkie, posiadają dowody, które są zarazem konstrukcjami odpowiednich multikolorowań. Być może jest to spowodowane tym, że po tym jak Bruce Reed i Colin McDiarmid rozkręcili tę gałąź matematyki, a następnie pozostawili nie pracując w tej dziedzinie, multikolorowaniem zajmowali się głównie informatycy. Gdyby więc za odpowiednie twierdzenia wzięli się matematycy, którzy uznają również inne techniki niż konstrukcja algorytmów, być może pojawiłoby się świeże spojrzenie, a wraz z nim nowe, ważne wyniki. Telefonia komórkowa tylko na to czeka.

Literatura

[1] L. Narayanan, *Channel assignment and graph multicoloring*, Handbook of Wireless Networks and Mobile Computing, Nowy Jork, 2002
[2] C. McDiarmid, B. Reed, *Channel assignment and weight coloring*, Wiley InterScience, Nowy Jork, 2000
[3] L. Narayanan, S.M. Shende, *Static frequency assignment in cellular networks*, Algorithmica, Nowy Jork, 2001

[4] K.S. Sudeep, S. Vishwanathan, *A technique multicoloring triangle-free hexagonal graphs*, Indian Institute of Technology, Bombaj, 2006
[5] J. Janssen, *Distributed online frequency assignment in cellular networks*, Journal of algorithms, Halifax, 2000
[6] P. Sparl, J. Źierovnik, *2-local 4/3-competitive algorithm for multicoloring hexagonal graphs*, Journal of algorithms, Halifax, 2005
[7] R. Witkowski, *Algorytmy multikolorowania grafów w zagadnieniach przydziału kanałów w sieciach bezprzewodowych*, praca magisterska na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza, Poznań, 2007
[8] R. Witkowski, *Wybrane zagadnienia kolorowania i multikolorowania grafów*, praca magisterska na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza, Poznań, 2006
[9] R. Witkowski, *Zadanie G – Billboardy*, Mistrzostwa Wielkopolski w Programowaniu Zespołowym, Poznań, 2006
[10] F.Y.L. Chin, Y. Zhang, H. Zhu, *A 1-local 13/9-competitive algorithm for multicoloring hexagonal graphs*, konferencja w Concoon, 2007

Rafał Witkowski (2) , (Wydział Matematyki i Informatyki, Zakład Matematyki Dyskretnej), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań, Polska

E-mail address: rmiw@amu.edu.pl

(2) Ta praca powstała dzięki finansowaniu grantu nr N206 017 32/2452 na lata 2007-2010